Nafouz

التمرين الأول (05,5 نقاط) :

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: i ، $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و -1.

1. نعتبر التحويل S المعرّف بـ : $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}z+1-i$.
   أ / اكتب العبارة المركبة لهذا التحويل بشكل أبسط.
   ب / ما طبيعة التحويل S وما عناصره المميّزة؟
2. أ / عيّن لواحق النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C بالتحويل S.
   ب / بيّن أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.
3. عيّن لاحقة النقطة G حيث G مرجّح الجملة $\{(A;3);(B,1);(C,-2)\}$
   أ / عيّن لاحقة النقطة G' مرجّح الجملة $\{(A';3);(B',1);(C',-2)\}$.
   ب / عيّن $z_{G'}$ حيث : $G'=S(G)$. ماذا تستنتج؟
4. نعتبر التحويل T الذي يرفق بكل نقطة M النقطة M' حيث: $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$
   أ / بيّن أن : $\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$
   ب/ ما طبيعة التحويل T وما عناصره المميّزة؟
   ج / عيّن لواحق النقط D ، E و F صور النقط A ، B و C بالتحويل T.
   د / بيّن أن المثلثين ABC و EDF متقايسان.

التمرين الثاني (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(3;2;0)$ ، المستوي (P) يمرّ بالنقطة B والشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له، المستوي (Q) معادلته الديكارتية $x-y+2z+4=0$ سطح الكرة (S) مركزه A ونصف قطره AB.

1. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).
2. حدّد المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S).
3. أ / احسب بعد النقطة A عن المستوي (Q). واستنتج أنّ المستوي (Q) يمسّ سطح الكرة (S)
   ب/ هل يمسّ المستوي (P) سطح الكرة (S) ؟
4. بيّن أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q)هي النقطة $C(0;2;-1)$.
5. بيّن أن (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (D) حيث تمثيله الوسيطي هو: $\begin{cases} x=t \\ y=12-5t \\ z=4-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

6. تحقّق من أنّ النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D).
7. نسمي (R) المستوي المعرّف بالنقطة A والمستقيم (D) بمعنى: $A \in (R)$ و $(D) \subset (R)$

هل هذه العبارة خاطئة " المستوي (R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ "

التمرين الثالث (04 نقاط):

1. نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$.

أ / احسب u_1 ، u_2 و u_3.

ب / أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \le u_n \le 3$

ج / ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا يمكن القول عن تقاربها؟

2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

أ / بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0.

ب / اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج / استنتج نهاية المتتالية (u_n) ماذا يمكن القول عن تقاربها؟

التمرين الرابع (06,5 نقاط):

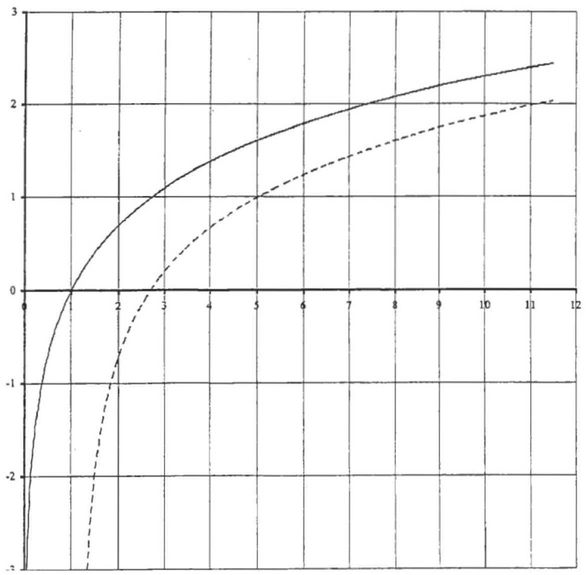
لتكن الدالة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$. نسمّي (C) التمثيل البياني للدالة f و Γ المنحني الذي معادلته $y = \ln x$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الشكل المقابل

1. ادرس تغيّرات الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.
2. أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \ln x]$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.
3. نريد البحث عن المماس للمنحني (C) المار من المبدأ O .

أ / a عدد حقيقي أكبر تماما من 1. بيّن أن المماس T_a للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها a المار بمبدأ المعلم يحقق : $f(a) - af'(a) = 0$

لتكن g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

ب / بيّن أنّه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$ و المعادلة: $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ لهما نفس الحلول.



ج / بعد دراسة تغيّرات الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$ بيّن أنّ u تنعدم مرة واحدة على $\mathbb{R}$.

د / استنتج وجود مماس وحيد للمنحني (C) مار من مبدأ المعلم O .المنحنيان (C) و Γ ممثلان اسفل الصفحة، انقل الشكلين بدقة على ورقة الإجابة ثم انشئ المماس T_a بعناية مع تحديد المنحيين على هذه الوثيقة

هـ / m عدد حقيقي ، نعتبر المعادلة $f(x) = mx$. بقراءة بيانية أوجد حلول المعادلة السابقة والتي تنتمي إلى المجال $]1;10]$

التمرين الأول (04 نقاط) :

لكل سؤال أربعة اقتراحات واحدة منها صحيحة ، اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، t و 't وسيطان حقيقيان.

- المستوي (P) معادلته $x-2y+3z+5=0$
- المستوي (S) تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-2+t+2t' \\ y=-t-2t' \\ z=-1-t+3t' \end{cases}$ والمستقيم (D) تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-1-t \end{cases}$
- نعتبر النقطتين $M(-1;2;3)$ و $N(1;-2;9)$.

1. التمثيل الوسيطي للمستوي (P) هو:

أ	$\begin{cases} x=t \\ y=1-2t \\ z=-1+3t \end{cases}$	ب	$\begin{cases} x=t+2t' \\ y=1-t+t' \\ z=-1-t \end{cases}$	ج	$\begin{cases} x=t+t' \\ y=1-t-2t' \\ z=-1-t-3t' \end{cases}$	د	$\begin{cases} x=1+2t+t' \\ y=1-2t+2t' \\ z=-1-t' \end{cases}$

2. .

أ	المستقيم (D) والمستوي (P) متقاطعان في $A(-8;3;2)$	ب	المستقيم (D) والمستوي (P) متعامدان
ج	المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)	د	المستقيم (D) والمستوي (P) متوازيان تماما

3. .

أ	المستقيم (D) والمستقيم (MN) متعامدان	ب	المستقيم (D) والمستقيم (MN) متوازيان
ج	المستقيم (D) والمستقيم (MN) متقاطعان	د	المستقيم (D) والمستقيم (MN) متطابقان

4.

أ	المستوي(P) والمستوي (S) متعامدان	ب	المستوي(P) والمستوي (S) متوازيان
ج	المستقيم (Δ) الممثّل وسيطيا بـ: $\begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=-3-t \end{cases}$ هو مستقيم تقاطع المستوي(P) والمستوي (S)	د	النقطة M تنتمي الى تقاطع المستوي(P) والمستوي (S)

التمرين الثاني (05,5 نقاط): نعتبر في المجال $I=[0;1]$ الدالة f المعرّفة بـ $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم استنتج أنه من أجل كل x من I $f(x)$ تنتمي الى I.

2. نعتبر المتتالية (u_n) بـ: $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$

أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n تنتمي I.

لدراسة المتتالية (u_n) نعتمد طريقتين مختلفتين.

الطريقة الأولى: 3. أ / مثّل بيانيا المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ والتمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس وحدة الرسم $10cm$ يمكن استعمال جدول القيم لرسم التمثيل البياني للدالة f.

ب / باستعمال التمثيل البياني السابق مثل الحدود u_0 ، u_1 و u_2. ثم ضع تخمينا حول اتجاه المتتالية (u_n) وتقاربها.

ج / تحقّق من أنّ : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

د / أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أثبت أن نهايتها l تحقّق $f(l)=l$ ثم احسب l.

الطريقة الثانية: تعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

3. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n.
4. استنتج نهاية المتتالية (u_n) وتقاربها.

التمرين الثالث (05,5 نقاط):

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8z+20=0$

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب: $-2i$ ، $4-2i$ ، $4+2i$ و 1

2. مثل هذه النقط في المعلم ثم استنتج طبيعة المثلّث ABC.

من أجل نقطة M تختلف عن A ذات اللاحقة z نرفق النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث $z'=\dfrac{z-4-2i}{z+2i}$

3. عين مجموعة النقط M بحيث z' حقيقي .
4. عين مجموعة النقط M بحيث $|z'|=1$
5. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي z يختلف عن $-2i$: $z'-1=\dfrac{-4-4i}{z+2i}$
6. احسب $|-4-4i|$ ثم استنتج أن: $DM'.AM=4\sqrt{2}$
7. بين أنه إذا كانت M نقطة من الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الرابع(05 نقاط):

لتكن الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم بينّ أن: $f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها.
3. ليكن (C_f) المنحنى الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس حيث $\|\vec{i}\|=3$
بين أن المستقيم $(\Delta): y=x+\ln 2$ مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$.
4. بيّن أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f)
5. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) ومقاربيه.
6. اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة التي فاصلتها 0
7. أنشئ المنحني (C_f)

الموضوع الأول — 20 نقطة

التمرين الأول — 05,5 نقاط

0,25

1/ أ / تبسيط العبارة:

$z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+1-i$

0,75

ب / التحويل S تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$. ومركزه النقطة التي لاحقتها

$\frac{\sqrt{3}}{3}(1+i)$

0,75

2/ أ / لواحق النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C بالتحويل S

$z_{C'}=\left(1+\sqrt{3}\right)i$ ، $z_{A'}=1-\sqrt{3}$

$z_{B'}=2+\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-2\right)i$

0,5

ب / التبيين أن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

بما أن المثلث $A'B'C'$ صورة ABC بتشابه S فإن المثلثين ABC و $A'B'C'$ متشابهان.

طريقة أخرى: الاثبات أن $A'B'=2AB$ ، $A'C'=2AC$ و $B'C'=2BC$

$A'B'=2AB$

$\left|z_{B'}-z_{A'}\right|=\left|1+2\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right|=2\sqrt{5}$

$\left|z_{B}-z_{A}\right|=\left|1-2i\right|=\sqrt{5}$

$C'A'=2CA$

$\left|z_{A'}-z_{C'}\right|=\left|1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right|=2\sqrt{2}$

$\left|z_{A}-z_{C}\right|=\left|1+i\right|=\sqrt{2}$

$C'B'=2CB$

$\left|z_{B'}-z_{C'}\right|=\left|2+\sqrt{3}+i\left(2\sqrt{3}-1\right)\right|=2\sqrt{5}$

$\left|z_{B}-z_{C}\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{5}$

0,25

3/ تعيين لاحقة النقطة G حيث G مرجّح الجملة $\{(A;3);(B,1);(C,-2)\}$

$$z_G=\frac{3z_A+z_B-2z_C}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

تعيين لاحقة النقطة G' مرجّح الجملة $\{(A';3);(B',1);(C',-2)\}$

$$z_{G'}=\frac{3z_{A'}+z_{B'}-2z_{C'}}{2}=\frac{5-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}i}{2}$$

تعيين $z_{G'}$ حيث : $G'=S(G)$

$$z_{G'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_G+1-i=\frac{5-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}i}{2}$$

الاستنتاج: التشابه يحافظ على المرجّح

$\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$=2\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=2\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$

التحويل T تحاك نسبته -1 مركزه G

أو يمكن القول إنه تناظر مركزي مركزه G

نعيين لواحق النقط D ، E و F صور النقط A ، B و C بالتحويل T.

$z_F=4+2i$ و $z_E=2+3i$ ، $z_D=3+i$

التبيين أن المثلثين ABC و EDF متقايسان

بما أن المثلث EDF صورة ABC بالتحويل T فإن المثلثين ABC و EDF متقايسان.لأن التحاكي الذي نسبته -1 هو تقايس

طريقة أخرى:

$ED=AB$

$\left|z_D-z_E\right|=\left|1-2i\right|=\sqrt{5}$

$\left|z_B-z_A\right|=\left|1-2i\right|=\sqrt{5}$

$FD=CA$

$\left|z_D-z_F\right|=\left|-1-i\right|=\sqrt{2}$

$\left|z_A-z_C\right|=\left|1+i\right|=\sqrt{2}$

$FE=CB$

$\left|z_E-z_F\right|=\left|-2+i\right|=\sqrt{5}$

$\left|z_B-z_C\right|=\left|2-i\right|=\sqrt{5}$

التمرين الثاني — 04 نقاط

1 / المعادلة الديكارتية للمستوي (P): — 0,5

$(P): 2x+y-z-8=0$

2 / تحديد المعادلة الديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها $A(1;1;1)$ ونصف قطرها AB حيث: — 0,5

$AB=\sqrt{6}$

$(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$

$(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-3=0$

3 / أ / $d(A;(P))=\sqrt{6}$ (P)يمسّ (S) — 0,5

ب / $d(A;(Q))=\sqrt{6}$ (Q)يمسّ (S) — 0,5

4 / التبيين أن المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q)هي النقطة $C(0;2;-1)$. — 0,5

النقطة C تنتمي الى المستوي (Q) والشعاع $\overrightarrow{AC}$ مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي للمستوي (Q)

تعويض احداثيات النقطة C في المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) نجدها تنتمي، و $\overrightarrow{AC}=-\vec{n}$

5 / التبيين أن (P) و (Q) متقاطعان وفق المستقيم (D)

نعوض احداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في المعادلتين الديكارتيتين للمستويين (P) و (Q)

نجد في كلتا الحالتين $0=0$

6 / التحقّق من أنّ النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) نجد أن :

$A\notin(D)$

7 / إذا كان $A\in(R)$ و$(D)\subset(R)$ فإن المستوي (R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

المستوي (R) معرف بمستقيم ونقطة لا تنتمي إليه. نختار نقطتين من (D) هما $E(2;2;-2)$ و$F(0;12;4)$

$\overrightarrow{BC}(-3;0;-1)$ و $\overrightarrow{AE}(1;1;-3)$

$\overrightarrow{AF}(-1;11;3)$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$ و $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AF}=0$

ومنه $\overrightarrow{BC}$ ناظمي للمستوي (R)

I منتصف $[BC]$، $F\left(\frac{3}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$

$(R): 3x-z-4=0$ و $I\notin(R)$

ومنه فإن المستوي (R) هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

التمرين الثالث — 04 نقاط

1 / أ / $u_1=\frac{1}{2}$ ، $u_2=\frac{4}{3}$ و $u_3=\frac{6}{7}$. — 0,75

ب / الاستدلال بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 3$.

نعتبر الخاصية $P(n): 0\le u_n\le 3$

نتحقّق من صحّة الخاصية من أجل $n=0$

$0\le u_0\le 3$ الخاصية محقّقة من أجل $n=0$ أي

$P(0)$ولنفرض أنّها صحيحة من أجل n أي:

$P(n)$ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ "

لدينا من فرضية التراجع أن:

$0\le u_n\le 3$

$1\le 1+u_n\le 4$

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+u_n}\le 1$

$\frac{1}{2}\le\frac{2}{1+u_n}\le 2$

$0\le\frac{1}{2}\le u_{n+1}\le 2\le 3$

بقية السؤال ب/ ومنه $0\le u_{n+1}\le 3$

الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$0\le u_n\le 3$.

ج/ دراس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-u_n+2}{1+u_n}$$

$$=\frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{1+u_n}$$

بما أن $0\le u_n\le 3$ فإن المتتالية (u_n) غير رتيبة ، وبما أنها كذلك فلا يمكن استنتاج تقاربها.

2 / أ / بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0

نجد أنّ: $v_{n+1}=-\frac{1}{2}v_n$:

(v_n) هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و $v_0=\frac{2}{5}$

2 / ب / $v_n=\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ثم $u_n=\frac{2v_n+1}{1-v_n}$ بالتعويض نجد: $u_n=\dfrac{2\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

ج / $\lim u_n=1$ لأن $\lim\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ المتتالية (u_n) متقاربة

التمرين الرابع 06,5 نقاط

0,5

دراسة تغيرات الدالة f؛ $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5

f دالة تقبل الاشتقاق على $]1;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{(\ln x)^2}\right)$$

0,25

$f'(x)>0$ من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

0,5

جدول التغيرات:

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

0,25

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]=0$

0,25

(C) و Γ متقاربان بجوار $+\infty$

0,5

3 / أ / a عدد حقيقي أكبر تماما من 1. المماس T_a للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها a المار بمبدأ المعلم معادلته:

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

$y=f'(a)x-af'(a)+f(a)$

بما أن T_a يمرّ من المبدأ فأن:

$f(a)-af'(a)=0$

0,5

3 / ب / $g(x)=f(x)-xf'(x)$

$g(x)=\ln x-\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}-1$

$g(x)=\frac{(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1}{(\ln x)^2}$

بيّن أنّه على المجال $]1;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$ و المعادلة: $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ لهما نفس الحلول لدينا: $g(x)=0$ يكافئ أنه:

$\frac{(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$

$\begin{cases}(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0\\ (\ln x)^2\neq 0 \qquad / x\in\,]1;+\infty[\end{cases}$

3/ج/ دراسة تغيّرات الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(t)=t^3-t^2-t-1$

$\lim\limits_{t\to-\infty}u(t)=-\infty$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=+\infty$

u دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$u'(t)=3t^2-2t-1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
$u'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

u متزايدة تماما على $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ وعلى $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $\left[-\frac{1}{3};1\right]$

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{22}{27}$	↘	-2	↗	$+\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $u(t)=0$ تقبل حلاّ وحيدا t_0 على المجال $[1;+\infty[$ وبوضع $t=\ln x$

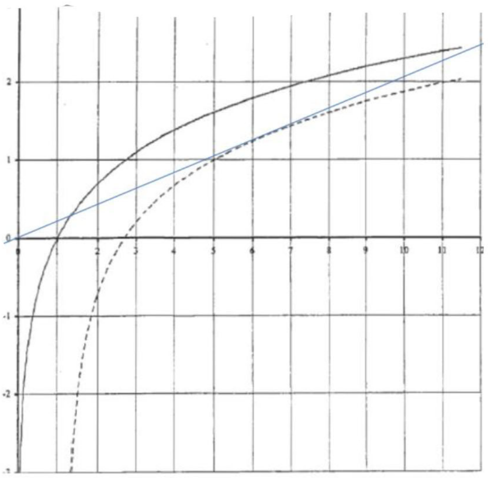
د / فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a على المجال $]e;+\infty[$ المماس T_a موجود

تقديم للمناقشة البيانية:

المستقيم الذي يمر من المبدأ ويقطع (C) في نقطة فاصلتها 10 (تنتمي الى المجال $[1;10]$) وترتيبها $\ln 10-\frac{1}{\ln 10}$ ومعادلته: $y=mx$ ميله يساوي $m=\frac{1}{10}\left(\ln 10-\frac{1}{\ln 10}\right)$

هـ / **المناقشة البيانية:** حلول المعادلة $f(x)=mx$ على المجال $]1;10]$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي معادلته $y=mx$. 0,5

- إذا كان $m<\frac{1}{10}\left(\ln 10-\frac{1}{\ln 10}\right)$ للمعادلة حل وحيد
- إذا كان $\frac{1}{10}\left(\ln 10-\frac{1}{\ln 10}\right)\le m\le f'(a)$ للمعادلة حلان متمايزان.
- إذا كان $m=f'(a)$ للمعادلة حل مضاعف a.
- إذا كان $m>f'(a)$ ليس للمعادلة حل



الموضوع الثاني 20 نقطة

التمرين الأول 04 نقاط

1 / الإجابة الصحيحة هي ب 01

$$\begin{cases} x=t+2t' \\ y=1-t+t' \\ z=-1-t \end{cases}$$

$\vec{u}_1(1;-1;-1)$ ، $\vec{u}_2(2;1;0)$ ، $\vec{n}(1;-3;3)$

$\vec{u}_1.\vec{n}=0$ ، $\vec{u}_2.\vec{n}=0$

2 / الإجابة الصحيحة هي ج وذلك بتعويض احداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في المعادلة الديكارتية للمستوي (P). 01

3 / الإجابة الصحيحة هي أ لأن:

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ ، $\vec{n}(1;-1;-1)$ و $\overrightarrow{MN}.\vec{n}=0$

4 / الإجابة الصحيحة هي ج :

$(S): x+y+2=0$

$(\Delta)\subset(S)$

$(\Delta)\subset(P)$

التمرين الثاني 05,5 نقاط

1 / دراسة تغيرات الدالة f على المجال $I=[0;1]$ 0,5

f دالة تقبل الاشتقاق على I ومن أجل كل x من I فإن: $f'(x)=\frac{10}{(x+4)^2}$، f متزايدة تماما على I

الاستنتاج أنه من أجل كل x من I $f(x)$ تنتمي الى I: 0,5

بما أن الدالة f متزايدة تماما على I فإن:

$1\ge x\ge 0$ فإن: $f(1)\ge f(x)\ge f(0)$: أي:

$1\ge f(x)\ge\frac{1}{2}>0$ ومنه: $1\ge f(x)\ge 0$

2 / الاستدلال بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 1$.

نعتبر الخاصية $P(n): 0\le u_n\le 1$ نتحقق من صحّة الخاصية من أجل $n=0$

$0\le u_0\le 1$ الخاصية محققة من أجل $n=0$ أي $P(0)$ ولنفرض أنّها صحيحة من أجل n

بقية الاستدلال بالتراجع: أي: $P(n)$ ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ "

لدينا من فرضية التراجع أن: $0\le u_n\le 1$

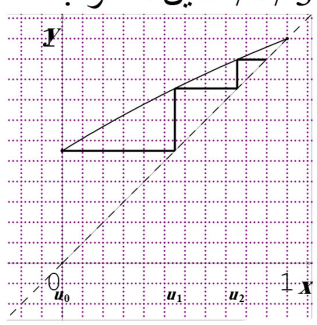
وبما أنه من أجل كل x من I فإن: $f(x)$ تنتمي الى I وبما أن $u_n\in I$ فإن:

$u_{n+1}=f(u_n)$ مع $f(u_n)\in I$

الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 1$.

3 / أ / تمثيل الحدود:



3 / ب / المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة. — 0,5

ج / التحقّق من أنّ: $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ — 0,75

ما أن: $u_n+2>0$ و $u_n+4>0$ فإن إشارة $u_{n+1}-u$ من إشارة $1-u_n$ لدينا:

$0\le u_n\le 1$

$-1\le -u_n\le 0$

$0\le 1-u_n\le 1$ المتتالية (u_n) متزايدة.

$0\le u_{n+1}-u_n\le 1$

د / بما أن المتتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة — 0,25

وبما أنها متقاربة فإن: $\lim u_n=\lim u_{n+1}=l$ — 0,25

$f(l)=l$; $l=\frac{3l+2}{l+4}$ ومنه: $l=1$

4 / الاثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$:

$v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$; $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{\frac{u_n-1}{u_n+2}-1}{\frac{u_n-1}{u_n+2}+2}$

بقيه السؤال 4 /

$v_{n+1}=\frac{3u_n+2-u_n-4}{3u_n+2+2u_n+8}=\frac{2u_n-2}{5u_n+10}$

$=\frac{2}{5\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right)}=\frac{2}{5}v_n$

(v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{2}{5}$

$v_0=-\frac{1}{2}$ ، $v_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

$u_n=\frac{-2v_n-1}{v_n-1}=\frac{-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}$

$\lim u_n=1$ لأن: $\lim -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

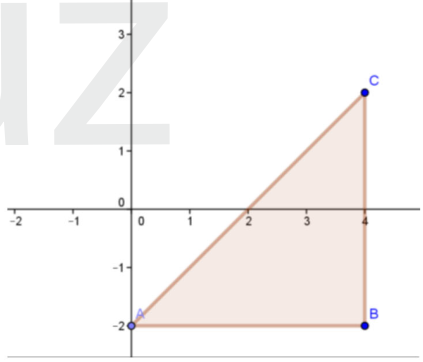
$\lim u_n=\lim\left(\frac{-1}{-1}\right)=1$

التمرين الثالث — 05,5 نقاط

1/ حل المعادلة: $z^2-8z+20=0$ — 01

$\Delta=-4=4i^2$ ، $z_1=4+2i$ و $z_2=4-2i$

0,5



المثلّث ABC قائم في B التبرير: — 0,5

$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$

3 / $z'=\frac{z-4-2i}{z+2i}$ ، تعيين مجموعة النقط M بحيث z' حقيقي

المجموعة هو $\frac{z-z_C}{z-z_A}=k;k\in\mathbb{R}$

المستقيم (AC) ما عدا النقطة A

4 / تعيين مجموعة النقط M بحيث $|z'|=1$ المجموعة هي محور القطعة $[AC]$

5 / $z'-1=\frac{-4-4i}{z+2i}$

6 / $|-4-4i|=4\sqrt{2}$

$z'-1=\frac{-4-4i}{z+2i};z'-z_D=\frac{-4-4i}{z-z_A}$

$|z'-z_D|=\frac{|-4-4i|}{|z-z_A|};DM'=\frac{4\sqrt{2}}{AM}$

$DM'.AM=4\sqrt{2}$

7 / M نقطة من الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2 معناه: $AM=2$

بالتعويض نجد $DM'=2\sqrt{2}$ المجموعة هى الدائرة التي مركزها D و نصف قطر ها $2\sqrt{2}$

التمرين الرابع — 05 نقاط

$f(x)=\ln\left(\dfrac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$

0,5 — $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\ln 2$

0,25 — الإثبات أن:

$$f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

0,25 — $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,75 — اتجاه التغيّر: f دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{e^{x}(2e^{2x}-8e^{x}-1)}{(e^{x}+2)(2e^{2x}+1)}$$

0,5 — $e^{x}=y\,;\Delta=72$ / $y_1=\dfrac{-4+3\sqrt{2}}{2}$

$y_2=\dfrac{-4-3\sqrt{2}}{2}$ مرفوض

$x_1=\ln y_1=\ln\left(\dfrac{-4+3\sqrt{2}}{2}\right)\approx-2,1$

x	$-\infty$	$\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-2\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

3 / $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+\ln 2)\right)$

المستقيم $(\Delta): y=x+\ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

4 / الإثبات أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f): ولتكن هذه النقطة هي النقطة $A(-2\ln 2;-\ln 2)$ نبين أن:

$f(-2\ln 2)=-\ln 2$

5 / دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته: $y=-\ln 2$

$$f(x)+\ln 2=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)+\ln 2$$

$$=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\times 2\right)=\ln\left(\frac{4e^{2x}+2}{e^{x}+2}\right)$$

$\dfrac{4e^{2x}+2}{e^{x}+2}\geq 1$; أي $\ln\left(\dfrac{4e^{2x}+2}{e^{x}+2}\right)\geq 0$

ومنه: $e^{x}(4e^{x}-1)\geq 0$ أي: $e^{x}\geq\frac{1}{4}$ اي: $x\geq-\ln 4$ ومنه من اجل كل x ; $x\geq-\ln 4$ فإن (C_f) فوق المستقيم المقارب وتحته في المجال الاخر.

دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم الذي معادلته (Δ) :

0,5 — f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,x_1]$ ومتزايدة تماما على $[x_1;+\infty[$

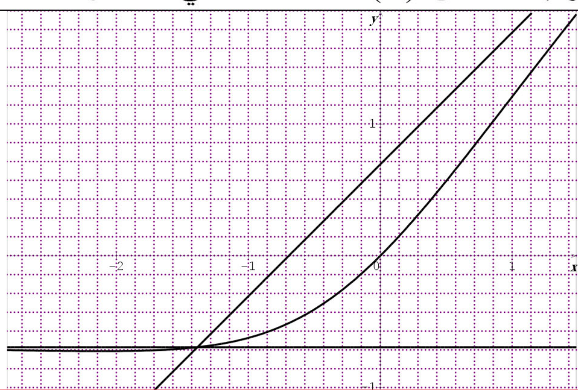
تابع للسؤال 2 / جدول التغيرات:

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)-(x+\ln 2)\geq 0$ اي $\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)\geq 0$

أي : $\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\geq 1$ ومنه: $x\geq-\ln 4$ من اجل كل x ; $x\geq-\ln 4$ فإن (C_f) فوق (Δ) وتحته في المجال الاخر.

6 / معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة التي فاصلتها 0: $y=x$



لتمثيل البيان